Correction BECEAS 2024

Problème de la ruine du joueur

1) $S_{i,k}^A(1) \in \{i-1, i+1\}$

$S_{i,h}^A(2) \in \{i-2, i, i+2\}$

2) $\mathbb{P}(S_{i,h}^A(2) = i-2) = \cancel{p^2}\ (1-p)^2$

$\mathbb{P}(S_{i,h}^A(2) = i) = (1-p)p + p(1-p) = 2p(1-p)$

$\mathbb{P}(S_{i,h}^A(2) = i+2) = p^2$

On vérifie bien que $(1-p)^2 + 2p(1-p) + p^2 = 1$.

3) Si $p = 1/2$,

$\mathbb{E}[S_{i,h}^A(2)] = (i-2)\frac{1}{4} + i\frac{1}{2} + (i+2)\frac{1}{4} = i$ ✓

4) On a $w_{0,h}^A = 0$.

5) $w_{k,h}^A = 1$

6) Pour que $T_{2,3}^A = 1$ il faut que le joueur A gagne donc $\mathbb{P}(T_{2,3}^A = 1) = p$.

7) Pour que le joueur A gagne (i.e. $S_{2,3}^A(T_{2,3}^A) = 3$) il faut qu'il gagne dès le premier lancer ($T_{2,3}^A = 1$)

ou qu'il perde au premier et gagne les deux suivants ($T_{2,3}^A = 3$)

~~ou~~.

~~Ce sont les seules possibilités pour qu'il gagne.~~

ou il perd au 1^er^, gagne au second, perd au 3 et gagne les deux suivants ($T^A_{2,3} = 5$), etc.

8) Pour $m = 0$, c'est la question 6).

Pour $m = 1$, $\mathbb{P}(T^A_{2,3} = 3) = (1-p)p^2$

Si c'est vrai au rang m,

~~$\mathbb{P}(T^A_{2,3} = m+1)$~~ $\mathbb{P}(T^A_{2,3} = 2(m+1)+1) = ?$

~~Si $T^A_{2,3} = 2(m+1)+1$ cela signifie qu'à l'issue des $2(m+1)$ lancers, il a 2 avances et qu'à l'issue des $2(m+1)-1 = 2m+1$ il avait 1 avance.~~

Donc

$\Rightarrow$ la probabilité qu'il ait 2 avances au bout de $2m$ lancers est donc de $p^m(1-p)^m$.

Donc $\mathbb{P}(T^A_{2,3} = 2(m+1)+1) = p^{m+1}(1-p)^{m+1} \times p$

$= p^{m+2}(1-p)^{m+1}$.

9) $w^A_{2,3} = \sum_{m \geq 0} p^{m+1}(1-p)^m = p \dfrac{1}{1-p(1-p)}$.

Pour $p = 1/2$, on a bien $w^A_{2,3} = 2/3$.

10) On a : $a_{2,r} - a_{1,r} = r(a_{1,r} - a_{0,r})$

$a_{3,r} - a_{2,r} = r(a_{2,r} - a_{1,r})$

$= r^2(a_{1,r} - a_{0,r})$

$\vdots$

$a_{i,r} - a_{i-1,r} = r^{i-1}(a_{1,r} - a_{0,r})$

En sommant, on a donc :

$$a_{i,r} - a_{1,r} = \sum_{j=1}^{i-1} r^j \, (a_{1,r} - a_{0,r})$$

$$\Rightarrow a_{i,r} - a_{0,r} = a_{i,r} - a_{1,r} + a_{1,r} - a_{0,r}$$

$$= \sum_{j=0}^{i-1} r^j \, (a_{1,r} - a_{0,r}).$$

On a donc $g(i,r) = \begin{cases} \dfrac{1-r^i}{1-r} & \text{si } r \neq 1 \\ i & \text{si } r = 1 \end{cases}$

11) Evident

12) On a $w^A_{i,k} = \mathbb{P}(S^A_{i,h}(T^A_{i,h}) = k \mid 1^{\text{er}} \text{ lancer} = \text{"pile"})\, p$

$$+ \, \mathbb{P}(S^A_{i,h}(T^A_{i,h}) = h \mid 1 \text{ lan.} = \text{"face"})\,(1-p)$$

$$= p\, w^A_{i+1,h} + (1-p)\, w^A_{i-1,h}.$$

13) On a donc $p(w^A_{i+1,h} - w^A_{i,h}) = (1-p)(w^A_{i,h} - w^A_{i-1,h})$

$$\Leftrightarrow w^A_{i+1,h} - w^A_{i,h} = \frac{1-p}{p}(w^A_{i,h} - w^A_{i-1,h})$$

Donc, $w^A_{i,h} = g(i, \frac{1-p}{p})(w^A_{1,h} - w^A_{0,h}) + w^A_{0,h}$

$$= g(i, \tfrac{1-p}{p})\, w^A_{1,h} = g(i, \tfrac{1-p}{p}) \left(\frac{w^A_{k,h} - w^A_{0,h}}{g(k, (1-p)/p)} + w^A_{0,h} \right)$$

$$= g(i, \tfrac{1-p}{p}) / g(k, \tfrac{1-p}{p}) = \frac{i}{k} \text{ si } p = 1/2 \text{ et } \frac{1-r^i}{1-r^k} \text{ si} \ldots$$

14) On a bien ~~vérifié~~ $w^A_{2,3} = 2/3$ si $p = 1/2$.

Si $p \neq 1$, $w^A_{2,3} = \dfrac{1 - [(1-p)/p]^2}{1 - [(1-p)/p]^3} = p\left[\dfrac{p^2 - (1-p)^2}{p^3 - (1-p)^3}\right]$

Si on admet l'égalité donnée dans la question,

$= \dfrac{p}{1 - p(1-p)}$. L'égalité est facile à vérifier.

15) La 1^re ligne de $\mathbb{P}$ est $(p_{0,s} ; s \in \{0, .., k\})$

$= (1, 0, .., 0)$

La dernière ligne est $(p_{k,s}, s \in \{0, .., k\})$

$= (0, .., 0, 1)$

16) On a $\mathbb{P}_{u,u-1} = p_{u-1,u-2} = 1-p)$

$p_{u,u+1} = p_{u-1,u} = p$

et $p_{u,v} = 0$ si $v \notin \{u+1, u-1\}$.

17) D'après la question précédente, $\mathbb{P}$ est clairement une matrice stochastique.

18) On a :

$\mathbb{P}(S(\ell+2) = s \mid S(\ell) = r) = \sum\limits_{t=0}^{k} \mathbb{P}[S(\ell+2) = s ; S(\ell+1) = t \mid S(\ell) = r]$

$= \sum\limits_{t=0}^{k} \dfrac{\mathbb{P}[S(\ell+1) = t ; S(\ell) = r]}{\mathbb{P}(S(\ell) = r)} \times \dfrac{\mathbb{P}[S(\ell+2) = s ; S(\ell+1) = t, S(\ell) = r)}{\mathbb{P}(S(\ell+1) = t ; S(\ell) = r)}$

$$= \sum_{t=0}^{k} P_{r,t} \times P_{t,s}$$

19) $$P^2_{u,v} = \mathbb{P}\{S^A_{i,h}(\ell+2) = v-1 \mid S^A_{i,h}(\ell) = u-1\}$$

$$P^m_{u,v} = \mathbb{P}\{S^A_{i,h}(\ell+m) = v-1 \mid S^A_{i,h}(\ell) = u-1\}.$$

20) Oui c'est une matrice stochastique car

$$\sum_{v=1}^{k+1} P^m_{u,v} = \sum_{s=0}^{k} \mathbb{P}\{S^A_{i,h}(\ell+m) = s \mid S^A_{i,h}(\ell) = u-1\} = 1.$$

21) La $(k+1)$ ième colonne de P^m donne les probabilités que A gagne à l'ième des n lancers.
La ligne 1 correspond à une somme initiale de 0
2 1
etc.

Donc, en faisant tendre m vers l'infini, la $(k+1)$ième colonne de Q donne les probabilités $w^{(A)}_{i,h}$, $i=0,\dots,h$.

22) $$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1-p & 0 & p & 0 \\ 0 & 1-p & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

23) La première ligne est toujours $(1,0,0,0)$
La dernière ligne est toujours $(0,0,0,1)$.

24) On a

$$P^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1-p & p(1-p) & 0 & p^2 \\ q^2 & 0 & pq & p \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ q & pq & 0 & p^2 \\ q^2 & 0 & pq & p \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Donc l'hypothèse de récurrence est vraie au rang $n=2$.

Supposons qu'elle soit vraie au rang $n=2k$

On a $P^{2(k+1)} = P^{2k} P^2$.

La deuxième ligne sera donc :

$$\begin{pmatrix} q\sum_{j=0}^{m/2-1}(pq)^j + q(pq)^{m/2} \\ (pq)^{m/2+1} \\ 0 \\ p^2(pq)^{m/2} + p^2\sum_{j=0}^{m/2-1}(pq)^j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q\sum_{j=0}^{k}(pq)^j \\ (pq)^{k+1} \\ 0 \\ p^2\sum_{j=0}^{k}(pq)^j \end{pmatrix}.$$

De même, la troisième ligne est.

$$\begin{pmatrix} q^2\sum_{j=0}^{k-1}(pq)^j + q^2(pq)^k \\ 0 \\ (pq)^{k+1} \\ p(pq)^k + p\sum_{j=0}^{k-1}(pq)^j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q^2\sum_{j=0}^{k}(pq)^j \\ 0 \\ (pq)^{k+1} \\ p\sum_{j=0}^{k}(pq)^j \end{pmatrix}$$

Si m est impair on a

$$P^m = P^{2k+1} = P^{2k} P$$

Donc la deuxième ligne est :

$$\begin{pmatrix} q \sum_{j=0}^{k-1} (pq)^j + q(pq)^k \\ \cancel{(pq)^{k+1}} \quad 0 \\ p\,(pq)^k \\ p^2 \sum_{j=0}^{k-1} (pq)^j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q \sum_{j=0}^{k} (pq)^j \\ 0 \\ p\,(pq)^k \\ p^2 \sum_{j=0}^{k-1} (pq)^j \end{pmatrix}$$

et enfin la troisième ligne :

$$\left(q^2 \sum_{j=0}^{k-1} (pq)^j \ ; \ q(pq)^k \ ; \ 0 \ ; \ p \sum_{j=0}^{k} (pq)^j \right).$$

26) $$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{q}{1-pq} & 0 & 0 & p^2 \frac{1}{1-pq} \\ \frac{q^2}{1-pq} & 0 & 0 & \frac{p}{1-pq} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

27) ~~Si p=1/2~~, la probabilité que le joueur A gagne est $p \times Q_{2,4} + (1-p) \times Q_{3,4}$

$$= \frac{p^3}{1-pq} + \frac{pq}{1-pq} = \begin{cases} 1/2 & \text{si } p = 1/2 \\ 1/3 & \text{si } p = 1/3 \end{cases}$$

$$= \frac{p^3 + pq}{1-pq} = \frac{p(p^2+q)}{1-pq} = p\,\frac{p^2+1-p}{1-p+p^2} = p.$$

Problème du Char d'assaut allemand

1) $s+1$ est le numéro de série du 1^{er} char fabriqué
N est le nombre de chars produit
n est le nombre de chars capturés

2) $\text{card}(E_n) = \binom{N}{n}$

3) C'est la loi uniforme discrète autrement dit,

$$\mathbb{P}(\{(X_{(1)}, \dots, X_{(n)}) = (i_1, \dots, i_n)\}) = \frac{1}{\binom{N}{n}}.$$

4) $$\mathbb{E}(Y) = \sum_{i=m}^{N-n+m} i \binom{i-1}{m-1}\binom{N-i}{n-m} \Big/ \binom{N}{n}$$

$$= m \sum_{i=m}^{N-n+m} \binom{i}{m}\binom{N-i}{n-m} \Big/ \binom{N}{n}.$$

En posant $j = i+1$, $= \frac{m}{\binom{N}{n}} \binom{N+1}{n+1} = \frac{m(N+1)}{n+1}$

5) Il faut calculer $E(Y^2)$

$$E(Y^2) = \sum_{i=m}^{N-n+m} i^2 \binom{i-1}{m-1}\binom{N-i}{n-m} \Big/ \binom{N}{n}$$

$$= \sum_{i=m}^{N-n+m} i(i+1) \binom{i-1}{m-1}\binom{N-i}{n-m} \Big/ \binom{N}{n}$$

$$- E(Y)$$

$$= \sum_{i=m}^{N-n+m} m(m+1) \binom{i+1}{m+1}\binom{N-i}{n-m} \Big/ \binom{N}{n} - E(Y)$$

En posant $j = i+2$,

$$\sum_{i=m+2}^{N-n+m+2} m(m+1) \binom{j-1}{m+2-1}\binom{N+2-j}{n+2-m+2} \Big/ \binom{N}{n} - E(Y)$$

$$= m(m+1) \frac{\binom{N+2}{n+2}}{\binom{N}{n}} - \frac{m(N+1)}{n+1}$$

$$= m(m+1) \frac{(N+2)(N+1)}{(n+2)(n+1)} - \frac{m(N+1)}{n+1}$$

$$= \frac{m(N+1)\left[(m+1)(N+2) - (n+2)\right]}{(n+1)(n+2)}$$

Donc $\mathrm{Var}(Y) = \dfrac{m(N+1)\left[(m+1)(N+2) - (n+2)\right]}{(n+1)(n+2)} - \dfrac{m^2(N+1)^2}{(n+1)^2}$

(10)

$$= \frac{m(n+1)(N+1)[(m+1)(N+2)-(n+2)] - m^2(n+2)(N+1)k}{(n+2)(n+1)^2}$$

$$= \frac{m(N+1)[(n+1)(m+1)(N+2)-(n+1)(n+2) - \cancel{m}\, m(n+2)(N+1)]}{(n+2)(n+1)^2}$$

$$= \dots = \frac{m(N+1)}{(n+2)(n+1)^2}(N-n)(n-m+1).$$

6) $X_{(k)} \in \{s+k, \dots, s+k+N-n\}$

7) $\mathbb{P}(X_{(k)}-s = k+i)$ pour $i = 0, \dots, N-n$

$$= \underbrace{\binom{k+i-1}{k-1}}\binom{N-k-i}{n-k} \Big/ \binom{N}{n}$$

parmi les $k+i-1 \leq X_{(k)}-s$
en choisir $k-1$

Donc $X_{(k)}-s \sim \mathcal{H}(N, n, k)$.

8) $\mathbb{E}(\hat{N}(n,k,\ell)) = \frac{n+1}{\ell-k}\left(\mathbb{E}[X_{(\ell)}-s] - \mathbb{E}[X_{(k)}-s]\right) - 1$

$$= \frac{n+1}{\ell-k}\left(\frac{\ell(N+1)}{n+1} - \frac{k(N+1)}{n+1}\right) - 1$$

$$= N+1-1 = N.$$

9) Si $n=N$, $X_{(\ell)} = \ell$ et $X_{(k)} = k$

$$\Rightarrow \hat{N}(N,k,\ell) = \frac{N+1}{\ell-k}(\ell-k) - 1 = N$$

TSVP ↳

10) • Entre 1 et i on ne peut pas placer plus de $k-2$ points. Entre 1 et i, il y a $i-2$ ch.

Donc $k-2 \leq i-2 \Leftrightarrow k \leq i$

• De même, entre j et i, il y a $j-i-1$ obs et on ne peut placer plus de $\ell-k-1$ points. Donc

$\ell-k \leq j-i$

• Même raisonnement entre j et N conduisant à

$N-j \geq n-\ell$.

11) $E^a = \{(i,j) \in \mathbb{N}^2 \mid k \leq i \leq N-n+k$ et $\ell-k+i \leq j \leq N-n+\ell\}$

12) Parmi les $i-1$ obs. $< X_{(k)}$, il faut en choisir $(k-1)$. $\Rightarrow \binom{i-1}{k-1}$ possibilités.

Parmi les $j-i-1$ obs $\in \,]X_{(k)}, X_{(\ell)}[$ il faut en choisir $\ell-k-1 \Rightarrow \binom{j-i-1}{\ell-k-1}$ possibilités

Enfin, parmi les $N-j$ obs $> X_{(\ell)}$, il faut en choisir $n-\ell \Rightarrow \binom{N-j}{n-\ell}$ possibilités

$\Rightarrow \mathbb{P}(\{X_{(k)}=i\} \cap \{X_{(\ell)}=j\}) = \binom{i-1}{k-1}\binom{j-i-1}{\ell-k-1}\binom{N-j}{n-\ell}/\binom{N}{n}$.

13) Evident

14) $\mathbb{E}[X_{(k)}(X_{(\ell)}-X_{(k)})] = \sum_{i=k}^{N-n+k} \sum_{j=\ell-k+i}^{N-n+\ell} i(j-i)$

$= \sum_{i=k}^{N-n+k} i \binom{i-1}{k-1} \sum_{j=\ell-k+i}^{N-n+\ell} (j-i)\binom{j-i-1}{\ell-k-1}\binom{N-j}{n-\ell} / \binom{N}{n}$

Or, $\displaystyle\sum_{j=l-k+i}^{N-n+l} (j-i)\binom{j-i-1}{l-k-1}\binom{N-j}{n-l}$

$$= (l-k)\sum_{j=l-k+i}^{N-n+l}\binom{j-i}{l-k}\binom{N-j}{n-l}$$

Posons $r = j-i+1$

$$= (l-k)\sum_{r=l-k+1}^{N-n+l-i+1}\binom{r-1}{l-k+1-1}\binom{N-r-i+1}{n-l}$$

$$= (l-k)\sum_{r=l-k+1}^{(*)}\binom{r-1}{l-k+1-1}\binom{N-i+1-r}{n-(l-k+1)-k+1}$$

$$(*) = N-i+1-n\cancel{+k}-1+l\cancel{-k}+1 = N-n+l-i+1$$

$$= (l-k)\binom{N-i+1}{n-k+1}.$$

Donc, $E[X_{(k)}(X_{(l)}-X_{(k)})]$

$$= (l-k)\sum_{i=k}^{N-n-k} i\binom{i-1}{k-1}\binom{N-i+1}{n-k+1} \Big/ \binom{N}{n}$$

Or, $E(X_{(k)}-s) = \displaystyle\sum_{i=k}^{N-n-k} i\binom{i-1}{k-1}\binom{N-i}{n-k}$

$$E[X_{(k)}(X_{(l)}-X_{(k)})] = (l-k)\sum_{i=k}^{N-n-k} i\binom{i-1}{k-1}\binom{N-i}{n-k}\frac{N-i+1}{n-k+1}$$

$$= \frac{l-k}{n-k+1}\left\{(N+1)E(X_{(k)}-s) - E[(X_{(k)}-s)^2]\right\}.$$

TSVP ↳

15) $\mathrm{Cov}(X_{(k)}, X_{(\ell)}) = \mathbb{E}[X_{(k)}X_{(\ell)}] - \mathbb{E}[X_{(k)}]\mathbb{E}[X_{(\ell)}]$

$$= \frac{\ell-k}{n-k+1}\left[(N+1)\,\mathbb{E}(X_{(k)}) - \mathbb{E}(X_{(k)}^2)\right] + \mathbb{E}[X_{(k)}^2]$$

$$\cancel{n\,\mathbb{E}[X_{(k)}X_{(\ell)}]} - \mathbb{E}[X_{(k)}]\mathbb{E}[X_{(\ell)}]$$

$$= \frac{(N+1)(\ell-k)}{(n-k+1)}\mathbb{E}(X_{(k)}) - \mathbb{E}(X_{(k)})\,\ell\,\frac{N+1}{n+1}$$

$$+ \mathbb{E}[X_{(k)}^2]\left[1 - \frac{\ell-k}{n-k+1}\right]$$

$$= \mathbb{E}[X_{(k)}^2]\left(\frac{n-\ell+1}{n-k+1}\right) - \mathbb{E}^2[X_{(k)}]\left(\frac{\ell}{k} - \frac{n+1}{k}\frac{\ell-k}{n-k+1}\right)$$

$$= \mathbb{E}[X_{(k)}^2]\left(\frac{n-\ell+1}{n-k+1}\right) - \mathbb{E}^2(X_{(k)})\left(\frac{\cancel{\ell n} - \ell k + \cancel{\ell} - \cancel{n\ell} + nk - \cancel{\ell} + k}{k(n-k+1)}\right)$$

$$= \mathbb{E}[X_{(k)}^2]\frac{n-\ell+1}{n-k+1} - \mathbb{E}^2(X_{(k)})\frac{n-\ell+1}{n-k+1}$$

Donc $r(n,k,\ell) = \dfrac{n-\ell+1}{n-k+1}$.

16) $\mathrm{Var}(\hat{N}(n,k,\ell)) = \left(\dfrac{n+1}{\ell-k}\right)^2 \mathrm{Var}(X_{(\ell)} - X_{(k)})$

Or, $\mathrm{Var}(X_{(\ell)} - X_{(k)}) = \mathrm{Var}(X_{(\ell)}) + \mathrm{Var}(X_{(k)}) - 2\,\mathrm{Cov}(X_{(k)}, X_{(\ell)})$

$$= \frac{\ell(N+1)}{(n+1)^2(n+2)}(N-n)(n-\ell+1) + \frac{k(N+1)}{(n+1)^2(n+2)}(N-n)(n-k+1)$$

$$- 2\,\frac{n-\ell+1}{\cancel{n-k+1}}\,\frac{k(N+1)}{(n+1)^2(n+2)}(N-n)\cancel{(n-k+1)}$$

$$= \frac{(N+1)}{(n+1)^2(n+2)}(N-n)\left[\ell(n-\ell+1) + k(n-k+1) - 2k(n-\ell+1)\right]$$

17) Il suffit d'étudier la fonction:

$$k \mapsto \frac{k(n-k+1)+n-2k}{(n-k)^2}$$

En dérivant par rapport à k:

$$\frac{(n-2k+1-2)(n-k)^2 + 2(n-k)(k(n-k+1)+n-2k)}{(n-k)^4}$$

$$= \frac{1}{(n-k)^3}\left[(n-k)(n-2k-1) + 2k(n-k+1) + 2n - 4k\right]$$

$$= \frac{1}{(n-k)^3}\left[n^2 - \cancel{2nk} - \cancel{n} - nk + \cancel{2k^2} + k + \cancel{2nk} - \cancel{2k^2} + 2k + \cancel{2n} - 4k\right]$$

$$= \frac{1}{(n-k)^3}\left[n^2 - nk + n - k\right] = \frac{1}{(n-k)^2}\left[1+n\right] > 0$$

La fonction est donc croissante. Il faut donc prendre $k = 1$.