Pb I

I.1) $E_2 = \{0,1,2\}$

I.2) $\mathbb{P}([S_2 = 0]) = \mathbb{P}([X_1=0]\cap[X_2=0]) = (1-q_1)(1-q_2)$

$\mathbb{P}([S_2 = 1]) = q_2(1-q_1) + q_1(1-q_2)$

$\mathbb{P}([S_3 = 2]) = q_1 q_2$

I.3) $\mathbb{E}(S_2) = q_2(1-q_1) + q_1(1-q_2) + 2q_1q_2$

$= q_1 + q_2$

On aurait également pu remarquer que

$\mathbb{E}(S_2) = \mathbb{E}(X_1) + \mathbb{E}(X_2) = q_1 + q_2$

$\mathbb{V}\mathrm{a}(S_2) = \mathbb{E}(S_2^2) - (q_1+q_2)^2$

$= q_2(1-q_1) + q_1(1-q_2) + 4q_1q_2 - (q_1+q_2)^2$

$= q_1 + q_2 \cancel{+2q_1q_2} - q_1^2 - q_2^2 \cancel{-2q_1q_2}$

$= q_1(1-q_1) + q_2(1-q_2)$

Idem, on aurait pu utiliser l'indépendance de X_1 et X_2 pour remarquer que $\mathbb{V}\mathrm{a}(X_1+X_2) = \mathbb{V}\mathrm{a}(X_1) + \mathbb{V}\mathrm{a}(X_2) = q_1(1-q_1) + q_2(1-q_2)$

I.4) $\mathbb{P}([S_n=0]) = \prod_{i=1}^{n} (1-q_i)$ et $\mathbb{P}([S_n=1]) = \prod_{i=1}^{n} q_i$

I.5) $\mathrm{Card}(\mathcal{S}_k) = C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$

I.6) $\mathbb{P}([S_n=2]) = \sum_{(i_1,i_2)\in\mathcal{S}_2} \mathbb{P}([X_{i_1}=1]\cap[X_{i_2}=1]\cap[X_1\neq 1]$
$\cap \dots \cap [X_{i_1-1}\neq 1]\cap[X_{i_2+1}\neq 1$
$\cap \dots \cap [X_n \neq 1])$

I.7) $\mathbb{P}(\{S_n = k\}) = \sum_{(i_1,\dots,i_k)\in S_k} \prod_{j=1}^{k} q_{i_j} \prod_{l \neq i_1,\dots,i_k} (1-q_{i_l})$

I.8) Si $q_1 = \dots = q_n = q$

$\mathbb{P}(\{S_n = k\}) = C_n^k q^k (1-q)^{n-k}$

c'est donc une loi binomiale de paramètres n et q.

6° pile ou face"

I.9) $p_{1/2}(n,r) = \mathbb{P}(\{S_n = r\}) = C_n^r \left(\frac{1}{2}\right)^r \left(1-\frac{1}{2}\right)^{n-r} = C_n^r 2^{-n}$

I.10) $p_q(n,r) = C_n^r q^r (1-q)^{n-r}$

On a donc, $f_{1/2,q}(n,r) = \log_{10} \frac{2^{-n}}{q^r(1-q)^{n-r}}$

$= \log_{10} 2^{-n} - r\log_{10}(q) - (n-r)\log_{10}(1-q)$

En dérivant : $-\frac{r}{q\ln 10} + \frac{(n-r)}{(1-q)\ln 10}$

$= \frac{q(n-r) - r(1-q)}{q(1-q)\ln 10} = \frac{nq - r}{q(1-q)\ln 10}$

Donc si $nq - r < 0$ ie. $q < r/n$, $\searrow$

et si $q > r/n$, $\nearrow$

$$\begin{array}{c|ccccc} q & 0 & & r/n & & 1 \\ \hline & +\infty & \searrow & & \nearrow & +\infty \end{array}$$

I.12) On ne peut pas distinguer les deux modèles

I.13) Il s'agit ici de comparer les modèles $M_{1/2}$ et M_q avec q tel que $q = \frac{3}{2}(1-q) \Leftrightarrow \frac{5}{2} q = \frac{3}{2}$

$\Leftrightarrow q = 3/5 = 0.6$

Donc $q \notin D$. De plus, on sait d'après le tableau de variations que $f_{1/2, 3/5}(n, r) < -1/2$

Donc on préfère le modèle $M_{3/5}$ c'est-à-dire le fait que la probabilité d'obtenir "pile" est 1.5 fois supérieure à celle d'obtenir "face".

I.14) ~~Car~~ La valeur $\hat{q}(n,r)$ est obtenue a maximinel.

$$\log_{10} P([S_n = r]) = \log_{10} C_n^r + r \log(q) + (n-r)\log(1-q)$$

En dérivant et annulant $\frac{r}{q} - \frac{n-r}{1-q} = 0$

$$\frac{r}{q} = \frac{n-r}{1-q} \quad \text{~~si~~ } q =$$

$$q(n-r) = r - rq \qquad qn = r \Rightarrow q = \frac{r}{n}$$

Si $q = 0$, ~~[illegible]~~ alors $r = 0$

I.14-) $\hat{q}(n,0) = 0$ et $\hat{q}(n,n) = 1$.

I.15) $f_{1/2, opt}(n,r) = \log_{10} \dfrac{2^{-n}}{\left(\frac{r}{n}\right)^r \left(1 - \frac{r}{n}\right)^{n-r}}$

$= \log_{10} \dfrac{n\, 2^{-n}}{r^r (n-r)^{n-r}}$

I.16) On a : $\delta_{ve,opt}(n,x) = 1.3201 > 1/2$

On préfère donc ici dire que le modèle "pièce équilibrée" est préférable.

I.17) $\mathbb{P}(\{S_n = x\}) = \sum_{j=1}^{N} \mathbb{P}(\{S_n = x\} \cap \{Q_N = \frac{j}{N+1}\})$

$$= \sum_{j=1}^{N} C_n^x \left(\frac{j}{N+1}\right)^x \left(1 - \frac{j}{N+1}\right)^{n-x} \frac{1}{N}$$

I.18) On a $\log_{10}(2^{-n}) = -60.206$

Donc le facteur de Bayes est de 0.076.

~~on préfère de~~ la pièce semble donc équilibrée

Problème II

II.1) C_N^k

II.2) $1/C_N^k$

II.3) Si $m < k$, $\mathbb{P}(\{M_k = m\}) = 0$

Si $m > N$, $\mathbb{P}[M_k = N] = 0$

II.4) Il y a C_{m-1}^{k-1} possibilités donc

$$\mathbb{P}(\{M_k = m\}) = \frac{C_{m-1}^{k-1}}{C_N^k}$$

II.5) On sait que $\sum_{m=k}^{N} \mathbb{P}(\{M_k = m\}) = 1$

II 6) $\mathbb{E}(M_k) = \sum_{m=k}^{N} m \frac{C_{m-1}^{k-1}}{C_N^k} = \frac{1}{C_N^k}\sum_{m=k}^{N} \frac{m!}{(k-1)!(m-k)!}$

$= \frac{k}{C_N^k}\sum_{m=k}^{N} C_m^k$

II 7) $\mathbb{E}(M_k) = \frac{k}{C_N^k}\sum_{\ell=k+1}^{N+1} C_{\ell-1}^k = \frac{k}{C_N^k}\frac{(N+1)!}{(k+1)!(N-k)!}$

$= \frac{k\,k!\,(N-k)!}{N!}\frac{(N+1)!}{(k+1)!(N-k)!} = \frac{(N+1)k}{k+1}$

II 8) En posant $\varphi_k(M_k) = \frac{k+1}{k}M_k - 1$

II 9) $\mathbb{E}[(\varphi_k(M_k))^2] = \left(\frac{k+1}{k}\right)^2 \mathbb{E}(M_k^2) + 1 - 2(N+1)$

Or, $\mathbb{E}(M_k^2) = \sum_{m=k}^{N} m^2 \frac{C_{m-1}^{k-1}}{C_N^k} = \frac{1}{C_N^k}\sum_{m=k}^{N} m(m+1)\frac{(m-1)!}{(k-1)!(m-k)!}$

$- \frac{(N+1)k}{k+1}$

$= \frac{1}{C_N^k}\sum_{m=k}^{N} \frac{(m+1)!\,k(k+1)}{(k+1)!\,(m-k)!} - \frac{(N+1)k}{k+1}$

$= \frac{k(k+1)}{C_N^k}\sum_{m=k}^{N} C_{m+1}^{k+1} - \frac{(N+1)k}{k+1}$

$= \frac{k(k+1)}{C_N^k}\sum_{\ell=k+2}^{N+2} C_{\ell-1}^{k+1} - \frac{(N+1)k}{k+1} = \frac{k(k+1)}{C_N^k} C_{N+2}^{k+2} - \frac{(N+1)k}{k+1}$

$$= \frac{k(k+1)\,k!\,\cancel{(N-k)!}}{N!}\ \frac{(N+2)!}{\cancel{(N-k)!}\,(k+2)!} - \frac{(N+1)k}{k+1}$$

$$= \frac{k(N+2)(N+1)}{k+2} - \frac{(N+1)k}{k+1}$$

Donc,

$$\mathbb{E}\left[(\psi_k(M_k))^2\right] = \frac{(k+1)^2(N+2)(N+1)}{k(k+2)} - \frac{(k+1)(N+1)}{k} - 1 - 2N$$

$$= \frac{(k+1)(N+1)\left[N+2-k-2\right]}{k(k+2)} - 1 - 2N$$

$$= \frac{(k+1)(N+1)(N-k)}{k(k+2)} - 1 - 2N$$

$$\Rightarrow Va(\psi_k(M_k^2)) = \frac{(k+1)(N+1)(N-k)}{k(k+2)} - (1+2N) - N^2$$

$$= \frac{(k+1)(N+1)(N-k) - k(k+2)(N+1)^2}{k(k+2)}$$

$$= \frac{(N+1)(k+1)\left[(k+1)(N+2) - k - 2\right]}{k(k+2)} - 1 - 2N$$

$$= \frac{(N+1)(k+1)\left[Nk + 2k + N + \cancel{2} - k - \cancel{2}\right]}{k(k+2)} - 1 - 2N$$

$$\Rightarrow \mathrm{Var}\left(\psi_k(M_k)\right) = \frac{(k+1)^2}{k(k+2)}(N+1)(N+2) - \frac{k+1}{k}(N+1) - 1 - 2N - N^2$$

$$= \frac{(k+1)^2}{k(k+2)}(N+1)(N+2) - \frac{k+1}{k}(N+1) - (1+N)^2$$

$$= (N+1)\left[\frac{(k+1)^2}{k(k+2)}(N+2) - \frac{k+1}{k} - (N+1)\right]$$

$$= (N+1)\left[\frac{(k+1)^2(N+2) - (k+1)(k+2) - k(k+2)(N+1)}{k(k+2)}\right]$$

$$= \frac{N+1}{k(k+2)}\left[(k^2+2k+1)(N+2) - (k+2)(kN+k) - (k+1)(k+2)\right]$$

$$= \frac{N+1}{k(k+2)}\left[\cancel{Nk^2} \cancel{+2k^2} + \cancel{2kN} + \cancel{4k} + N + 2 \cancel{-k^2N} \cancel{-k^2} \cancel{-2kN} \cancel{-2k} \cancel{-k^2} \cancel{-2k} - k - 2\right]$$

$$\frac{N+1}{k(k+2)}\left[N-k\right] \approx \frac{\lfloor N^a \rfloor N}{N^2} \sim N^{a-1}.$$

II.10) Par l'I.BT, $\forall \varepsilon > 0$

$$P\{|\psi_k(M_k) - N| > \varepsilon\} \leq \frac{\frac{N+1}{k(k+1)}(N-k)}{\varepsilon^2} \sim \frac{N^{a-1}}{\varepsilon^2} \to 0.$$

Problème III

III. 1) Evidemment

$$\sum_{i=1}^{N} \omega_{1,i} = n \text{ et } \sum_{i=1}^{N} \omega_{2,i} = m$$

III. 2) $\text{Card}(\Omega) = C_N^n C_N^m \Rightarrow \mathbb{P}(\{\omega\}) = \dfrac{1}{C_N^n C_N^m}$

III. 3) Si $K(\omega) = k$ alors signifie que k individus marqués ont été recapturés

III. 4) Il n'est pas possible que $k > \min(n, m)$

De même, il n'est pas possible que $k < n + m - N$

III. 5) $E(n, m, N) = \{\max(0, m + n - N) ; \min(n, m)\}$

III. 6) Il y a $C_N^n C_n^k C_{N-n}^{m-k}$ possibilités pour que $K = k$

Donc $\mathbb{P}(\{K = k\}) = \dfrac{C_n^k C_{N-n}^{m-k}}{C_N^m}$

III. 7) Evident

III. 8) $\mathbb{E}(K) = \dfrac{1}{C_N^m} \displaystyle\sum_{k \in E(n,m,N)} k \, C_n^k C_{N-n}^{m-k}$

$$= \frac{n}{C_N^m} \sum_{k=\max(1, m+n-N)}^{\min(n,m)} C_{n-1}^{k-1} \, C_{N-n}^{m-k}$$

$$= \frac{n}{C_N^m} \sum_{k=\max(1, n+m-N)}^{\min(n,m)} C_{n-1}^{k-1} \, C_{(N-1)-(n-1)}^{(m-1)-(k-1)}$$

Posons $\ell = k - 1$

$$= \frac{n}{C_N^m} \sum_{\ell = \max(0,\, n+m-N-1)}^{\min(n-1,\, m-1)} C_{n-1}^{\ell}\, C_{(N-1)-(n-1)}^{(m-1)-\ell}$$

$$= \frac{n}{C_N^m} \sum_{\ell = \max(0,\, (n-1)+(m-1)-(N-1))}^{\min(n-1,\, m-1)} C_{n-1}^{\ell}\, C_{N-1-(n-1)}^{(m-1)-\ell}$$

$$= \frac{n}{C_N^m} C_{N-1}^{m-1} = \frac{n\,(N-1)!}{(m-1)!\,\cancel{(N-m)!}} \frac{\cancel{(N-m)!}\, m!}{N!}$$

$$= \frac{n\,m}{N}$$

III.9) En prenant $\psi_{n,m}(k) = \left(\frac{k}{m\,n}\right)^{-1}$ $\hat{N}$

on a $E(1/\hat{N}) = \frac{1}{N}$.

III.10) $$E\left(\frac{1}{k+1}\right) = \sum_{k=m+n-N}^{\min(n,m)} \frac{1}{k+1} C_n^k\, C_{N-n}^{m-k} \frac{1}{C_N^m}$$

$$= \frac{1}{C_N^m} \sum_{k=m+n-N}^{\min(n,m)} \frac{n!}{(k+1)!\,(n-k)!} C_{N-n}^{m-k}$$

$$= \frac{1}{C_N^m} \frac{1}{n+1} \sum_{k=m+n-N}^{\min(n,m)} C_{n+1}^{k+1}\, C_{N-n}^{m-k}$$

$$= \frac{1}{C_N^m} \frac{1}{n+1} \sum_{\ell=m+n-N+1}^{\min(n+1,\, m+1)} C_{n+1}^{\ell}\, C_{N+1-(n+1)}^{m+1-\ell}$$

$$= \frac{1}{C_N^m} \frac{1}{n+1} C_{N+1}^{m+1} = \frac{1}{(n+1)} \frac{(N+1)}{(m+1)}$$

III. 11) En prenant $\tilde{N} = \dfrac{(n+1)(m+1)}{k+1} - 1$, on a

un estimateur sans biais de N.

Problème IV

IV 1) La v.a. Y_ε suit une loi de Bernoulli de paramètre p_ε

Donc $\mathbb{E}(Y_\varepsilon) = p_\varepsilon$

IV 2) Evident

IV 3) Par déf de Y_ε, $\mathbb{E}(|X|^a Y_\varepsilon) \geq \varepsilon^a\, \mathbb{E}(Y_\varepsilon) = \varepsilon^a\, \mathbb{P}([|X| > \varepsilon])$

IV 4) $\mathbb{P}([|X-\alpha| > \varepsilon]) = \mathbb{P}([X-\alpha > \varepsilon]) + \mathbb{P}([X-\alpha < -\varepsilon])$

$\geq \mathbb{P}([X-\alpha > \varepsilon])$

IV 5) $\mathbb{P}[X - m + \lambda > \varepsilon + \lambda] \leq \mathbb{P}[(|X-m+\lambda| > \varepsilon + \lambda]$

$$\leq \frac{\mathbb{E}(X-m+\lambda)^2}{(\varepsilon+\lambda)^2} = \frac{\sigma^2+\lambda^2}{(\varepsilon+\lambda)^2}$$

IV 6) Soit $f(\lambda) = \dfrac{\sigma^2+\lambda^2}{(\varepsilon+\lambda)^2} \Rightarrow f'(\lambda) = \dfrac{2\lambda(\varepsilon+\lambda)^2 - (\sigma^2+\lambda^2)\,2(\varepsilon+\lambda)}{(\varepsilon+\lambda)^4}$

$$= \frac{2(\varepsilon+\lambda)[\lambda(\varepsilon+\lambda) - \sigma^2 - \lambda^2]}{(\varepsilon+\lambda)^4} = \frac{2(\varepsilon+\lambda)[\lambda\varepsilon - \sigma^2]}{(\varepsilon+\lambda)^4}$$

D'où,

λ	0		σ^2/ε		$+\infty$
f'		$-$		$+$	
f		$\searrow$		$\nearrow$	

En prenant $\lambda = \sigma^2/\varepsilon$

$$\leq \frac{\sigma^2 + \sigma^4/\varepsilon^2}{(\varepsilon + \sigma^2/\varepsilon)^2} = \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2+\sigma^2}$$

IV7) $\mathbb{P}[X-m-\lambda < -\varepsilon-\lambda] \leq \mathbb{P}[|X-m-\lambda| > \varepsilon+\lambda]$

$$\leq \frac{\mathbb{E}[(X-m-\lambda)^2]}{(\varepsilon+\lambda)^2} = \frac{\sigma^2+\lambda^2}{(\varepsilon+\lambda)^2}$$

IV8) $\mathbb{P}[|X-m|>\varepsilon] = \mathbb{P}[X-m>\varepsilon] + \mathbb{P}[X-m<-\varepsilon]$

$$\leq \frac{2\sigma^2}{\varepsilon^2+\sigma^2}$$

IV9) Il faut trouver les valeurs de $\varepsilon>0$ pour lesquelles,

$$\frac{2\sigma^2}{\varepsilon^2+\sigma^2} \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2} \Leftrightarrow 2\varepsilon^2 \leq \varepsilon^2+\sigma^2 \Leftrightarrow \varepsilon^2<\sigma^2$$

$$\Rightarrow \underline{\varepsilon \in (0,\sigma)}.$$