Banque d'Épreuves des Concours des Écoles d'Actuariat et Statistique

Session 2020

Épreuve à option (B) : Probabilités

Durée : 4h

Corrigé

I – Application

I-1) Il est évident que F_1 est une bijection de $I =]0, \infty[$ dans $]0, 1[$. Ainsi, en résolvant l'équation $1 - (1 + x)^{-\lambda} = 1 - \alpha$, on trouve que $\mathrm{VaR}_\alpha(X_1) = \alpha^{-1/\lambda} - 1$. De même, F_2 est une bijection de $]0, \infty[$ dans $]0, 1[$ et en résolvant l'équation $1 - \exp(-\lambda x) = 1 - \alpha$, on trouve que $\mathrm{VaR}_\alpha(X_2) = \log(1/\alpha)/\lambda$.

I-2) Il suffit de faire l'étude de la fonction $f(x) = \log(x) - x + 1$. La dérivée de f est donnée pour tout $x \in]1, \infty[$ par $f'(x) = 1/x - 1 < 0$. Ainsi, f est strictement décroissante et donc $f(x) < f(1) = 0$ qui est le résultat demandé.

I-3) On a

$$\begin{aligned} \mathrm{VaR}_\alpha(X_2) - \mathrm{VaR}_\alpha(X_1) &= \log(1/\alpha)/\lambda - \alpha^{-1/\lambda} + 1 \\ &= \log(\alpha^{-1/\lambda}) - \alpha^{-1/\lambda} + 1 = f(\alpha^{-1/\lambda}), \end{aligned}$$

où $f(x) = \log(x) - x + 1$. Comme $\alpha^{-1/\lambda} > 1$ pour tout $\alpha \in]0, 1[$ et $\lambda > 0$, on a le résultat en utilisant la réponse à la question I-2).

I-4) La fonction de répartition F_1 étant continue et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, X_1 est une variable aléatoire de densité $f_1(x) = \lambda(1 + x)^{-\lambda-1}\mathbb{I}_{\{x>0\}}$. Ainsi,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(|X_1|) &= \mathbb{E}(X_1) = \lambda \int_0^\infty x(1 + x)^{-\lambda-1}dx = \lambda \int_1^\infty (y - 1)y^{-\lambda-1}dy \\ &= \lambda \int_1^\infty y^{-\lambda}dy - 1, \end{aligned}$$

car pour tout $\lambda > 0$,

$$\int_1^\infty y^{-\lambda-1}dy = \frac{1}{\lambda}$$

Il suffit donc d'étudier l'intégrale $\int_1^\infty y^{-\lambda}dy$. Si $\lambda \neq 1$,

$$\int_1^\infty y^{-\lambda}dy = \lim_{A\to\infty} \int_1^A y^{-\lambda}dy = \frac{1}{1 - \lambda} \left(\lim_{A\to\infty} A^{1-\lambda} - 1\right).$$

Ainsi, si $\lambda < 1$,

$$\int_1^\infty y^{-\lambda}dy = \infty,$$

et si $\lambda > 1$,

$$\int_1^\infty y^{-\lambda}dy = \frac{1}{\lambda - 1}$$

Enfin, si $\lambda = 1$

$$\int_1^\infty y^{-1}dy = \lim_{A\to\infty} \int_1^A y^{-1}dy = \lim_{A\to\infty} \log(A) = \infty.$$

En conclusion, si $\lambda \leq 1$, $\mathbb{E}(X_1) = \infty$ et si $\lambda > 1$,

$$\mathbb{E}(X_1) = \frac{\lambda}{\lambda - 1} - 1 = \frac{1}{\lambda - 1}.$$

L'ensemble L est donc $]1, \infty[$.

I-5) La fonction de répartition F_2 étant continue et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, X_2 est une variable aléatoire de densité $f_2(x) = \lambda \exp(-\lambda x)\mathbb{I}_{\{x>0\}}$. Ainsi, pour tout $\lambda > 0$,

$$\mathbb{E}(X_2) = \lambda \int_0^\infty x \exp(-\lambda x) dx.$$

En faisant une intégration par parties, on trouve

$$\mathbb{E}(X_2) = \lambda \left[-\frac{x}{\lambda} \exp(-\lambda x) \right]_0^\infty + \int_0^\infty \exp(-\lambda x) dx = \frac{1}{\lambda}.$$

I-6) En utilisant la définition de l'Expected Shorfall, on a pour tout $\alpha \in]0, 1[$ et $\lambda > 1$,

$$\mathrm{ES}_\alpha(X_1) = \frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha \left(s^{-1/\lambda} - 1 \right) ds = \frac{1}{\alpha} \left[\frac{s^{1-1/\lambda}}{1 - 1/\lambda} \right]_0^\alpha - 1 = \frac{\lambda}{\lambda - 1} \alpha^{-1/\lambda} - 1.$$

De même, pour tout $\alpha \in]0, 1[$ et $\lambda > 0$,

$$\mathrm{ES}_\alpha(X_2) = -\frac{1}{\lambda\alpha} \int_0^\alpha \log(s) ds = -\frac{1}{\lambda\alpha} [s(\log(s) - 1)]_0^\alpha = \frac{1}{\lambda}(1 - \log(\alpha)).$$

I-7) D'après la question I-2), on a $x > 1 + \log(x)$. Ainsi, comme $\lambda/(\lambda - 1) > 0$,

$$\frac{\lambda}{\lambda - 1} x - 1 > \frac{\lambda}{\lambda - 1}(1 + \log(x)) - 1 = \frac{\lambda}{\lambda - 1} \left(\frac{1}{\lambda} + \log(x) \right).$$

Comme $\lambda > 1$, on sait que $\lambda/(\lambda - 1) > 1$ et donc

$$\frac{\lambda}{\lambda - 1} \left(\frac{1}{\lambda} + \log(x) \right) > \frac{1}{\lambda} + \log(x),$$

qui montre le résultat annoncé. Pour résoudre cette question, on aurait également pu étudier directement la fonction $f(x) = \lambda/(\lambda - 1)x - 1 - 1/\lambda - \log(x)$.

I-8) On a

$$\mathrm{ES}_\alpha(X_2) - \mathrm{ES}_\alpha(X_1) = \frac{1}{\lambda} + \log(\alpha^{-1/\lambda}) - \frac{\lambda}{\lambda - 1} \alpha^{-1/\lambda} + 1.$$

Comme $\alpha^{-1/\lambda} > 1$, la question I-7) implique que $\mathrm{ES}_\alpha(X_2) < \mathrm{ES}_\alpha(X_1)$. Le portefeuille le moins risqué est donc celui associé à la variable aléatoire X_2.

I-9) On rappelle que

$$\mathrm{ES}_\alpha(X) = \frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha F^{-1}(1 - s) ds$$

En posant $t = F^{-1}(1 - s)$, on a $s = 1 - F(t)$ pour tout $s \in]0, \alpha[$ et donc $ds = -f(t)dt$. Ainsi,

$$\mathrm{ES}_\alpha(X) = \frac{1}{\alpha} \int_{F^{-1}(1-\alpha)}^\infty t f(t) dt.$$

La fonction f étant la densité de la variable aléatoire continue X, on en déduit que

$$\mathrm{ES}_\alpha(X) = \frac{1}{\alpha}\mathbb{E}\left(X\mathbb{I}_{\{X>F^{-1}(1-\alpha)\}}\right).$$

Comme $\mathbb{E}(X|A) = \mathbb{E}(X\mathbb{I}_A)/\mathbb{P}(A)$ avec $A = [X > F^{-1}(1-\alpha)]$, on en déduit le résultat.

I-10) La variable aléatoire admet pour densité la fonction $f_1(x) = \lambda(1+x)^{-\lambda-1}\mathbb{I}_{\{x>0\}}$. Ainsi,

$$\int_{F_1^{-1}(1-\alpha)}^{\infty} tf_1(t)dt = \lambda\int_{\alpha^{-1/\lambda}-1}^{\infty} t(1+t)^{-\lambda-1}dt.$$

En posant $u = 1+t$,

$$\int_{F_1^{-1}(1-\alpha)}^{\infty} tf_1(t)dt = \lambda\int_{\alpha^{-1/\lambda}}^{\infty}(u-1)u^{-\lambda-1}du = \lambda\left(\left[\frac{u^{1-\lambda}}{1-\lambda}\right]_{\alpha^{-1/\lambda}}^{\infty} + \left[\frac{u^{-\lambda}}{\lambda}\right]_{\alpha^{-1/\lambda}}^{\infty}\right)$$

Comme $\lambda > 1$,

$$\int_{F_1^{-1}(1-\alpha)}^{\infty} tf_1(t)dt = \lambda\frac{\alpha^{1-1/\lambda}}{\lambda-1} - \alpha$$

En divisant par α, on retrouve la même valeur que celle obtenue à la question I-6). De manière similaire, on vérifie l'égalité pour la variable aléatoire X_2.

II - Estimation de la Value-at-Risk

II-1) En rangeant par ordre croissant les éléments de la première ligne du tableau, on trouve que $X_{3,4}(\omega_1) = X_1(\omega_1) = 0.73$. De même, $X_{3,4}(\omega_2) = X_2(\omega_2) = 0.79$.

II-2) Tout d'abord, si $\omega \in [X_{n,n} \leq x]$, alors $\max\{X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega)\} \leq x$ et donc $X_1(\omega) \leq x, \ldots X_n(\omega) \leq x$. Autrement dit, $\omega \in [X_1 \leq x] \cap \ldots \cap [X_n \leq x]$. De plus, si $\omega \in [X_1 \leq x] \cap \ldots \cap [X_n \leq x]$ alors $X_1(\omega) \leq x, \ldots X_n(\omega) \leq x$ et en particulier, $\max\{X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega)\} \leq x$ ce qui montre le résultat.

II-3) D'après la question précédente, on a

$$\mathbb{P}[X_{n,n} \leq x] = \mathbb{P}([X_1 \leq x] \cap \ldots \cap [X_n \leq x]).$$

Par indépendance des X_i,

$$\mathbb{P}[X_{n,n} \leq x] = \mathbb{P}([X_1 \leq x]) \ldots \mathbb{P}([X_n \leq x]) = F^n(x),$$

puisque les variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ admettent la même fonction de répartition F.

II-4) Il fallait ici remarquer que $[X_{1,n} > x] = [X_1 > x] \cap \ldots \cap [X_n > x]$. Ainsi, par indépendance et égalité des fonctions de répartitiion,

$$\mathbb{P}[X_{1,n} \leq x] = 1 - \mathbb{P}[X_{1,n} > x] = 1 - (1-F(x))^n.$$

II-5) La fonction F^{-1} étant la bijection réciproque de la fonction croissante F, on a pour tout $i = 1, \ldots, n$ que $[F^{-1}(U_i) \leq x] = [U_i \leq F(x)]$. Ainsi,

$$\mathbb{P}([F^{-1}(U_i) \leq x]) = \mathbb{P}([U_i \leq F(x)]) = F(x),$$

la fonction de répartition d'une loi uniforme sur $[0, 1]$ étant la fonction identité.

II-6) Soit $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Par indépendance des X_i,

$$\mathbb{P}([X_1 \leq x_1] \cap \ldots \cap [X_n \leq x]) = \mathbb{P}([X_1 \leq x_1]) \ldots \mathbb{P}([X_n \leq x_n]).$$

En utilisant la question précédente,

$$\mathbb{P}([X_1 \leq x_1] \cap \ldots \cap [X_n \leq x]) = \mathbb{P}([F^{-1}(U_1) \leq x_1]) \ldots \mathbb{P}([F^{-1}(U_n) \leq x_n]).$$

En utilisant à présent l'indépendance des variables aléatoires U_i,

$$\mathbb{P}([X_1 \leq x_1] \cap \ldots \cap [X_n \leq x]) = \mathbb{P}([F^{-1}(U_1) \leq x_1] \cap \ldots \cap [F^{-1}(U_n) \leq x_n])$$

qui est le résultat attendu.

II-7) Ce calcul a déjà été fait lors de la question I-5).

II-8) Il est évident que $u_n = \lceil n(1-\alpha) \rceil / (n+1)$.

II-9) On sait que $\lceil n(1-\alpha) \rceil = n(1-\alpha) + \varepsilon$ où $\varepsilon \in [0, 1[$. Ainsi, $n(1-\alpha) \leq \lceil n(1-\alpha) \rceil < n(1-\alpha)+1$. Par le théorème des gendarmes, comme $n(1-\alpha) \to \infty$, on en déduit la première partie de la question. De plus, comme $n/(n+1) \to 1$ et $1/(n+1) \to 0$, une autre utilisation du théorème des gendarmes nous assure que $u_n \to 1 - \alpha$.

II-10) Les variables aléatoires E_i étant indépendantes, de même loi et d'espérance commune égale à 1 et puisque $m = \lceil n(1-\alpha) \rceil \to \infty$, la loi faible des grands nombres nous assure que

$$S_n = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} E_i \xrightarrow{\mathbb{P}} 1,$$

lorsque n (et donc m) tends vers l'infini. De même, $T_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 1$.

II-11) D'aprés le résultat admis après la question II-6), on sait que

$$\widehat{\mathrm{VaR}}_{n,\alpha}(X) \stackrel{\mathcal{L}}{=} F^{-1}(U_{\lceil n(1-\alpha) \rceil, n}).$$

De plus, $U_{\lceil n(1-\alpha) \rceil, n} \xrightarrow{\mathbb{P}} 1 - \alpha$. La fonction F^{-1} étant continue, elle conserve la convergence en probabilité et ainsi $F^{-1}(U_{\lceil n(1-\alpha) \rceil, n}) \xrightarrow{\mathbb{P}} F^{-1}(1-\alpha) = \mathrm{VaR}_\alpha(X)$. On en déduit finalement que pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\mathbb{P}\left(\left| \widehat{\mathrm{VaR}}_{n,\alpha}(X) - \mathrm{VaR}_\alpha(X) \right| \geq \varepsilon \right) \stackrel{\mathcal{L}}{=} \mathbb{P}\left(\left| F^{-1}(U_{\lceil n(1-\alpha) \rceil, n}) - \mathrm{VaR}_\alpha(X) \right| \geq \varepsilon \right) \to 0,$$

ce qui conclut la démonstration.

Partie III – Value-at-Risk et Expected Shortfall

III-1) Si F est bijective de I sur $]0,1[$, on sait que $\{x \in \mathbb{R} \mid F(x) \geq 1-\alpha\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq F^{-1}(1-\alpha)\}$. Noter que l'on utilise ici le fait que F (et donc F^{-1}) est croissante. Comme $\inf\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq F^{-1}(1-\alpha)\} = F^{-1}(1-\alpha)$, on obtient le résultat voulu.

III-2) La fonction de répartition de $\lambda X + m$ est pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$G(y) = \mathbb{P}([\lambda X + m \leq y]) = \mathbb{P}\left(\left[X \leq \frac{y-m}{\lambda}\right]\right) = F\left(\frac{y-m}{\lambda}\right).$$

Par définition, on a

$$\begin{aligned} \mathrm{VaR}_\alpha(\lambda X + m) &= \inf\{y \in \mathbb{R} \mid G(y) \geq 1-\alpha\} \\ &= \lambda \inf\left\{\frac{y-m}{\lambda} \in \mathbb{R} \mid F\left(\frac{y-m}{\lambda}\right) \geq 1-\alpha\right\} + m. \end{aligned}$$

Evidemment, si $y \in \mathbb{R}$, $z = (y-m)/\lambda \in \mathbb{R}$ et donc

$$\inf\left\{\frac{y-m}{\lambda} \in \mathbb{R} \mid F\left(\frac{y-m}{\lambda}\right) \geq 1-\alpha\right\} = \inf\left\{z \in \mathbb{R} \mid F(z) \geq 1-\alpha\right\} = \mathrm{VaR}_\alpha(X).$$

III-3) Si $F^{\leftarrow}(y) \leq x$ alors $\inf\{z \in \mathbb{R} \mid F(z) \geq y\} \leq x$. La fonction F étant croissante, on en déduit que $x \in \{z \in \mathbb{R} \mid F(z) \geq y\}$ et donc que $F(x) \geq y$.

III-4) – Si $y \leq F(x)$ on sait que $x \in \{z \in \mathbb{R} \mid F(z) \geq y\}$. Ainsi,

$$x \geq \inf\{z \in \mathbb{R} \mid F(z) \geq y\} = F^{\leftarrow}(y).$$

Ce résultat montre que $\{y \in \mathbb{R} \mid y \leq F(x)\} \subset \{y \in \mathbb{R} \mid F^{\leftarrow}(y) \leq x\}$ et la question III-4), montre l'inclusion inverse d'où l'égalité des deux ensembles.

III-5) D'après la question précédente, on sait que

$$\{\omega \in \Omega \mid F^{\leftarrow}(U(\omega)) \leq x\} = \{\omega \in \Omega \mid U(\omega) \leq F(x)\}$$

et ainsi que $[F^{\leftarrow}(U) \leq x] = [U \leq F(x)]$. On en déduit que $\mathbb{P}([[F^{\leftarrow}(U) \leq x]) = \mathbb{P}([U \leq F(x)]) = F(x)$ ce qui conclut la démonstration.

III-6)

$$\int_0^\alpha |\mathrm{VaR}_s(X)| ds = \int_0^\alpha |F^{\leftarrow}(1-s)|\, ds = \int_{1-\alpha}^1 |F^{\leftarrow}(s)|\, ds \leq \int_0^1 |F^{\leftarrow}(s)|\, ds.$$

La densité d'une loi uniforme sur $[0,1]$ étant l'indicatrice sur $[0,1]$, on en déduit que

$$\int_0^1 |F^{\leftarrow}(s)|\, ds = \mathbb{E}(|F^{\leftarrow}(U)|),$$

qui est le résultat demandé.

III-7) De la question précédente, il vient

$$\int_0^\alpha |\mathrm{VaR}_s(X)| ds \leq \mathbb{E}(|F^{\leftarrow}(U)|) = \mathbb{E}(|X|).$$

Ainsi, si $\mathbb{E}(|X|) < \infty$, l'assertion (1) est vraie.

III-8) Si $Y \leq Z$, on sait que pour tout $\alpha \in]0,1[$, $\mathrm{VaR}_\alpha(Y) \leq \mathrm{VaR}_\alpha(Z)$. Par monotonie de l'intégrale,

$$\mathrm{ES}_\alpha(Y) = \frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha \mathrm{VaR}_s(Y) ds \leq \frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha \mathrm{VaR}_s(Z) ds = \mathrm{ES}_\alpha(Z).$$

De plus, par linéarité de l'intégrale, la question III-3) implique que

$$\begin{aligned}
\mathrm{ES}_\alpha(\lambda X + m) &= \frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha \mathrm{VaR}_s(\lambda X + m) ds = \frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha [\lambda \mathrm{VaR}_s(X) + m] ds \\
&= \lambda \frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha \mathrm{VaR}_s(X) ds + m = \lambda \mathrm{ES}_\alpha(X) + m.
\end{aligned}$$